الفصل الرابع

نظرية السطوح

مفهوم النطاق المستوي: نفرض L منحني بسيط مغلق يقع في المستوي XoY ، المنحني L يحدد على المستوي XoY منطقتين إحداهما محدودة وواقعة داخل هذا المنحني، والثانية خارجه وغير محدودة.

نسمي المنحني L حداً للمجموعة D الواقعة داخله.

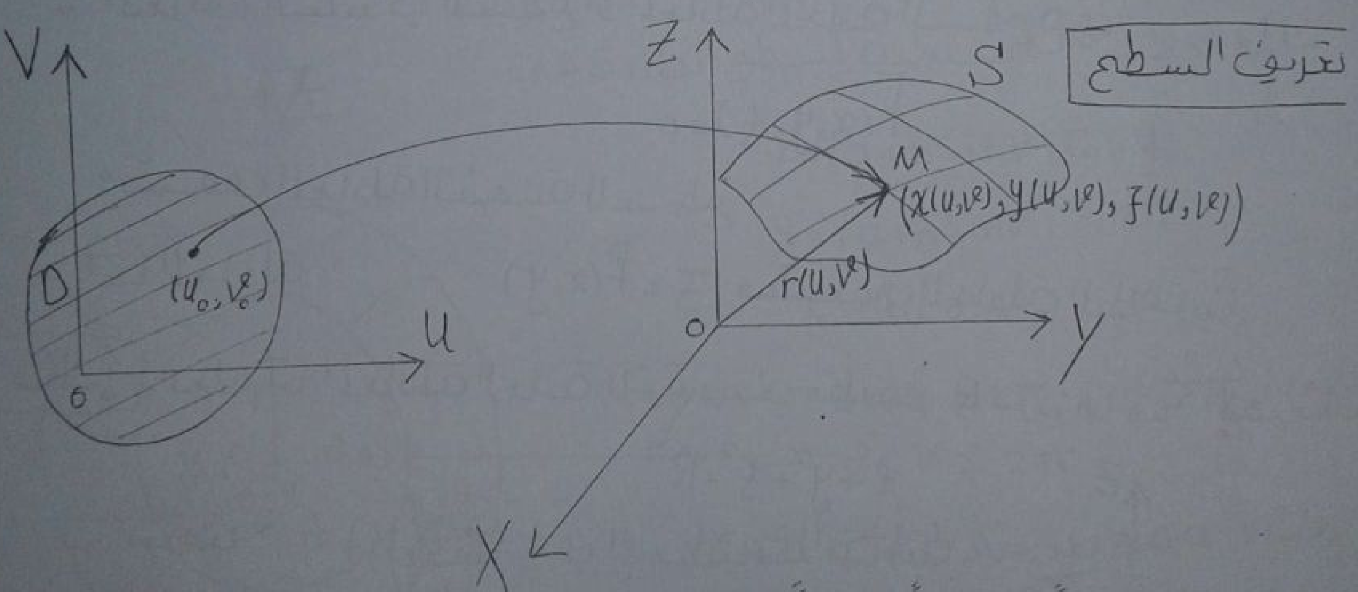
نرمز للمجموعة D مع المنحني L بـ $\bar{D}$ ، لصاقة D ، أي

$$\bar{D} = D \cup L$$

الآن إذا كانت المجموعة المحدودة D والواقعة داخل L المنحني البسيط المغلق، إذا كانت مفتوحة ومترابطة، عندئذٍ ندعى هذه المجموعة نطاقاً مستوياً.

تعريف النطاق المستوي: هو أي مجموعة محدودة مفتوحة ومترابطة يحدها منحني بسيط مغلق.

تعريف السطح



نفرض D نطاقاً مستوياً واقعاً في المستوي uov ، ولنعرف على $\bar{D}$ ثلاث دوال حقيقية مستمرة

$$x : \bar{D} \to \mathbb{R} \qquad y : \bar{D} \to \mathbb{R} \qquad z : \bar{D} \to \mathbb{R}$$
$$(u,v) \mapsto x(u,v) \qquad (u,v) \mapsto y(u,v) \qquad (u,v) \mapsto z(u,v)$$

نسمي مجموعة نقاط الفضاء $M(x,y,z)$ سطحاً، ونرمز له بـ S

حيث: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{array}\right\}$ ① حيث $(u,v) \in D$

- نسمي المعادلات ① المعادلات الوسيطية للسطح، ونسمي u,v وسطاء السطح.

- الآن إذا افرضنا أن السطح S منسوب إلى جملة إحداثية ديكارتية حيث $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ متجهات الواحدة مع المحاور الإحداثية، عندئذ المعادلة المتجهة للسطح S تعطى بالعلاقة:

$$S: \vec{r}(u,v) = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k} \qquad ②$$

حيث $\vec{r}(u,v)$ متجه الموضع للنقطة المتحولة $M(x,y,z)$ من السطح S.

- التعريف التقليدي للسطح أو المعادلة العامة للسطح هي:

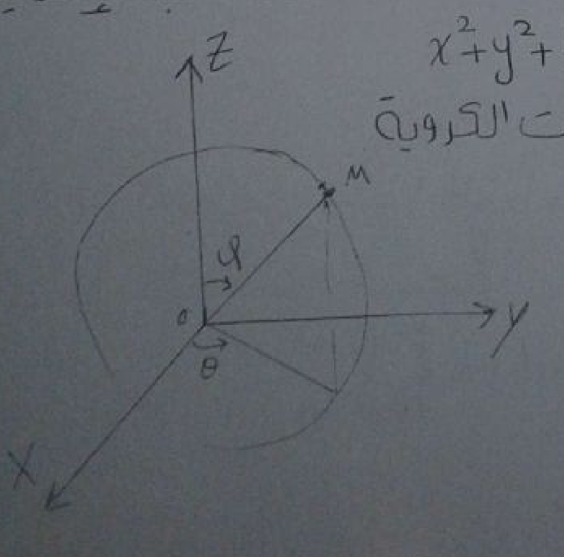
$$F(x,y,z) = 0$$

وتسمى المعادلة الضمنية للسطح.

- أما المعادلة $z = f(x,y)$ فتسمى المعادلة الظاهرية.

مثال 1 نعلم أن المعادلة العامة لكرة نصف قطرها R مركزها مبدأ الإحداثيات هي:

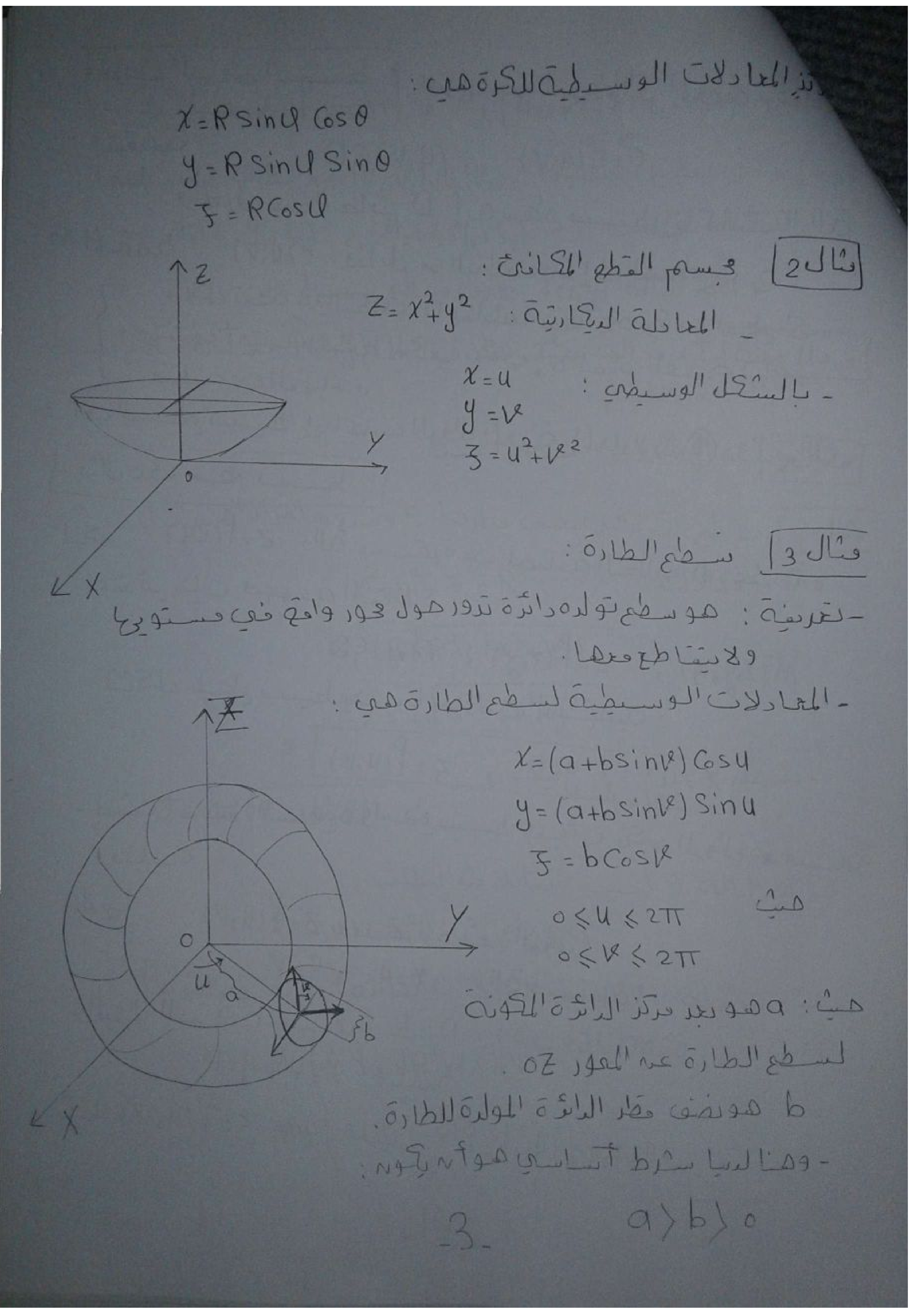
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



- نفرض: (R, θ, φ) هي الإحداثيات الكروية لنقطة ما على سطح الكرة

حيث (θ, φ) وسطاء الكرة.

$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$0 \le \varphi \le \pi$$



…نه المعادلات الوسيطية للكرة هي :

$$x = R\sin\varphi\cos\theta$$
$$y = R\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = R\cos\varphi$$

مثال 2 مجسم القطع المكافئ :

- المعادلة الديكارتية : $z = x^2 + y^2$
- بالشكل الوسيطي :

$$x = u$$
$$y = v$$
$$z = u^2 + v^2$$

مثال 3 سطح الطارة :

- تعريفه : هو سطح تولده دائرة تدور حول محور واقع في مستويها ولا يتقاطع معها.
- المعادلات الوسيطية لسطح الطارة هي :

$$x = (a + b\sin v)\cos u$$
$$y = (a + b\sin v)\sin u$$
$$z = b\cos v$$

حيث

$$0 \leq u \leq 2\pi$$
$$0 \leq v \leq 2\pi$$

حيث : a هو بعد مركز الدائرة المكونة لسطح الطارة عن المحور oz .

b هو نصف قطر الدائرة المولدة للطارة.

- وهنا لدينا شرط أساسي هو أن يكون :

$$a > b > 0$$

تعريف السطح البسيط: نقول عن السطح S المعطى بالمعادلة

المتجهة: $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$; $(u,v)\in D$

والمعرف على النطاق D إنه سطح بسيط إذا كانت الدالة

المتجهة $\vec{r}(u,v)$ تقابل من النطاق D إلى السطح S.

{ ، لكل نقطة من النطاق D تقابلها نقطة وحيدة من السطح S "
، ويكتفى أحيانا بشرط التباين ، أي إن النقاط المختلفة لها صور
مختلفة في الفضاء" }

- أي السطح بسيط إذا كانت الدوال المعنية بالمعادلات ① دوال تقابل.

- مثال على سطح بسيط:

لتكن $z=f(x,y)$ دالة مستمرة على لصاقة النطاق D، على $\bar{D}$، "$\bar{D}$"

عندئذ فإن مجموعة النقاط:

$M(x,y,z)$; $z=f(x,y)$; $(x,y)\in D$

تشكل سطح بسيط معطى بالمعادلات الوسيطية:

$$x=u \quad , \quad y=v \quad , \quad z=f(u,v) \quad *$$

- لنثبت أن هذا السطح هو سطح بسيط - يجب أن تكون الدوال * مستمرة ومتباينة.

- لدينا $z=f(u,v)$ مستمرة حسب الفرض.

$x=u$, $y=v$ دالة مستمرة.

- الدوال السابقة مستمرة على D ، وهي متباينة حيث:

$x=u$, $y=v$ متباينة

أما $z=f(u,v)$ فمن أجل: $(u_1,v_1)\neq(u_2,v_2)$

$$\Rightarrow M_1(u_1, v_1, f(u_1, v_1)) \neq M_2(u_2, v_2, f(u_2, v_2))$$

أي إن أي نقطتين مختلفتين $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ من النطاق D تقابلهما نقطتان مختلفتان $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ، $M_1(x_1, y_1, z_1)$ من السطح $S \Leftarrow$ الدالة $f(x,y)$ تعرف سطح بسيط.

- **ملاحظة** أي دالة تكتب على شكل $f(x,y)$ تسمى سطح بسيط في الفراغ.

مثال 2 $z = x^2 + y^2$ سطح بسيط

مثال 3 سطح الكرة التي نصف قطرها R ومبدؤها مركز الإحداثيات.

معادلتها $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

ومنه :

$$z_1 = +\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

$$z_2 = -\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

- نفرض $x = u$ ، $y = v$ يكون

$$z = \mp\sqrt{R^2 - (u^2 + v^2)}$$

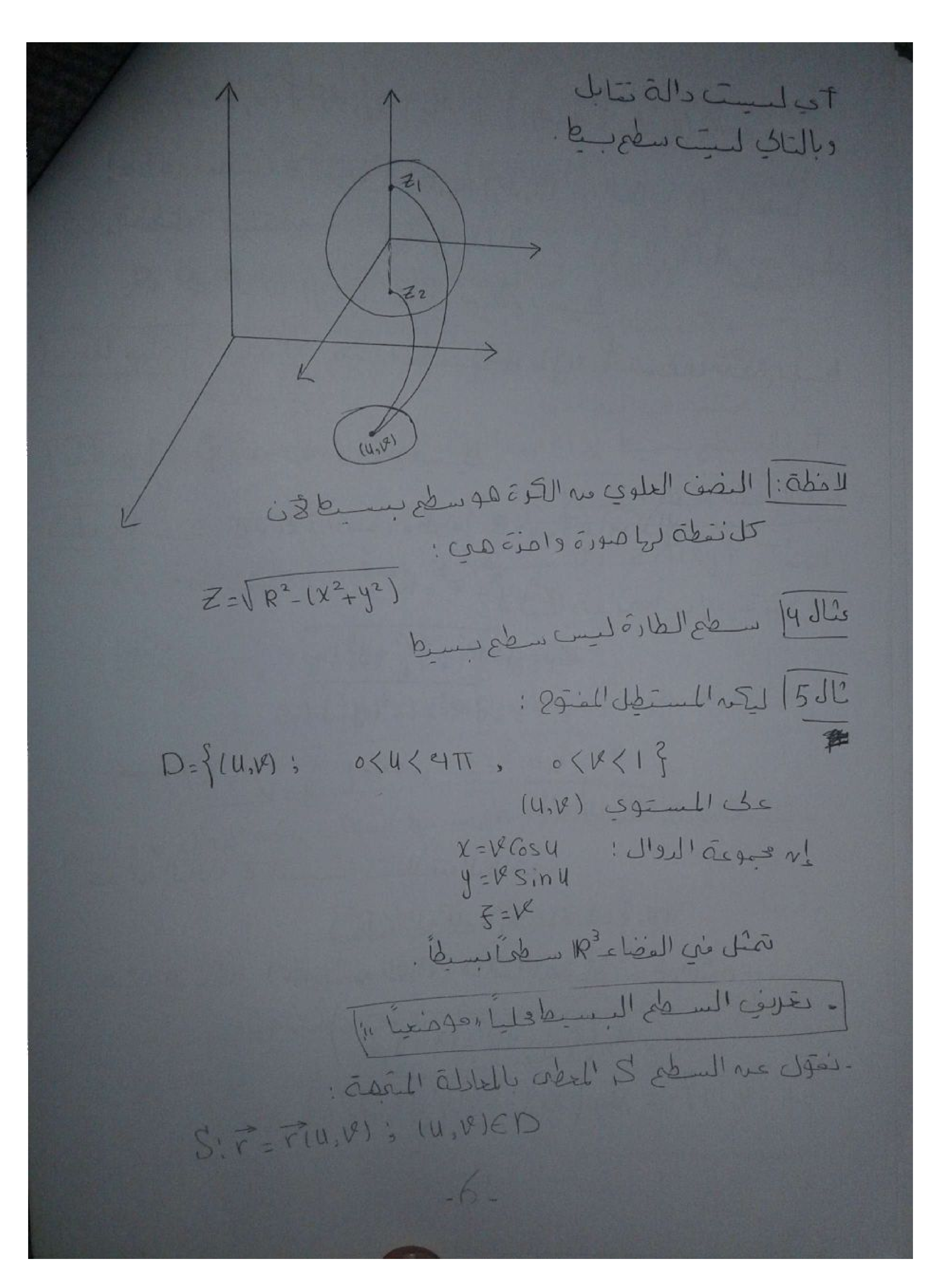
نجد أن الدالة z ليست تقابلاً من النطاق :

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 ;\ u^2 + v^2 < R^2\}$$

حيث كل نقطة (u, v) من النطاق D تقابلها على سطح الكرة :

$$M_1\left(x, y, \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}\right)$$

$$M_2\left(x, y, -\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}\right)$$



أي ليست دالة تقابل
وبالتالي ليست سطح بسيط.

لاحظة: النصف العلوي من الكرة هو سطح بسيط لأن كل نقطة لها صورة واحدة هي:

$$Z=\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$$

مثال 4 سطح الطارة ليس سطح بسيط

مثال 5 ليكن المستطيل المفتوح:

$$D=\{(u,v) ; \quad 0<u<4\pi \ , \quad 0<v<1\}$$

على المستوى (u,v)

إن مجموعة الدوال:

$$x=v\cos u$$
$$y=v\sin u$$
$$z=v$$

تمثل في الفضاء $\mathbb{R}^3$ سطحاً بسيطاً.

- تعريف السطح البسيط محلياً "موضعياً":

- نقول عن السطح S المعطى بالمعادلة المتجهة:

$$S: \vec{r}=\vec{r}(u,v) \ ; \ (u,v)\in D$$

سطح بسيط محلياً إذا وجد من أجل كل نقطة من نقاطه جوار بحيث جميع نقاط السطح المنتمية لهذا الجوار تمثل بحد ذاتها سطحاً بسيطاً.

نقول:
- الجوار في المستقيم هو مجال
- الجوار في المستوي هو قرص مفتوح
- الجوار في الفضاء الثلاثي هو كرة مفتوحة

جوار

مثال 1: الكرة سطح بسيط محلياً، وذلك لأن الجوار الصغير لأي نقطة من الكرة هو محل هندسي لدالة مستمرة تحقق شرط التباين، لذلك فهو يمثل سطح بسيط، في حين أن كامل الكرة ليست سطحاً بسيطاً.

مثال 2: سطح الطارة سطح بسيط محلياً حيث إنه لكل نقطة جوار صغير منها يمثل مساراً لدالة مستمرة وتحقق شرط التباين. لكنه ليس بسيط بأكمله.

مثال عن سطح ليس بسيط محلياً

لنأخذ المستطيل المفتوح «نطاق»

$$P = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ -2 < u < 2 \ \text{و}\ 0 < v < 2\}$$

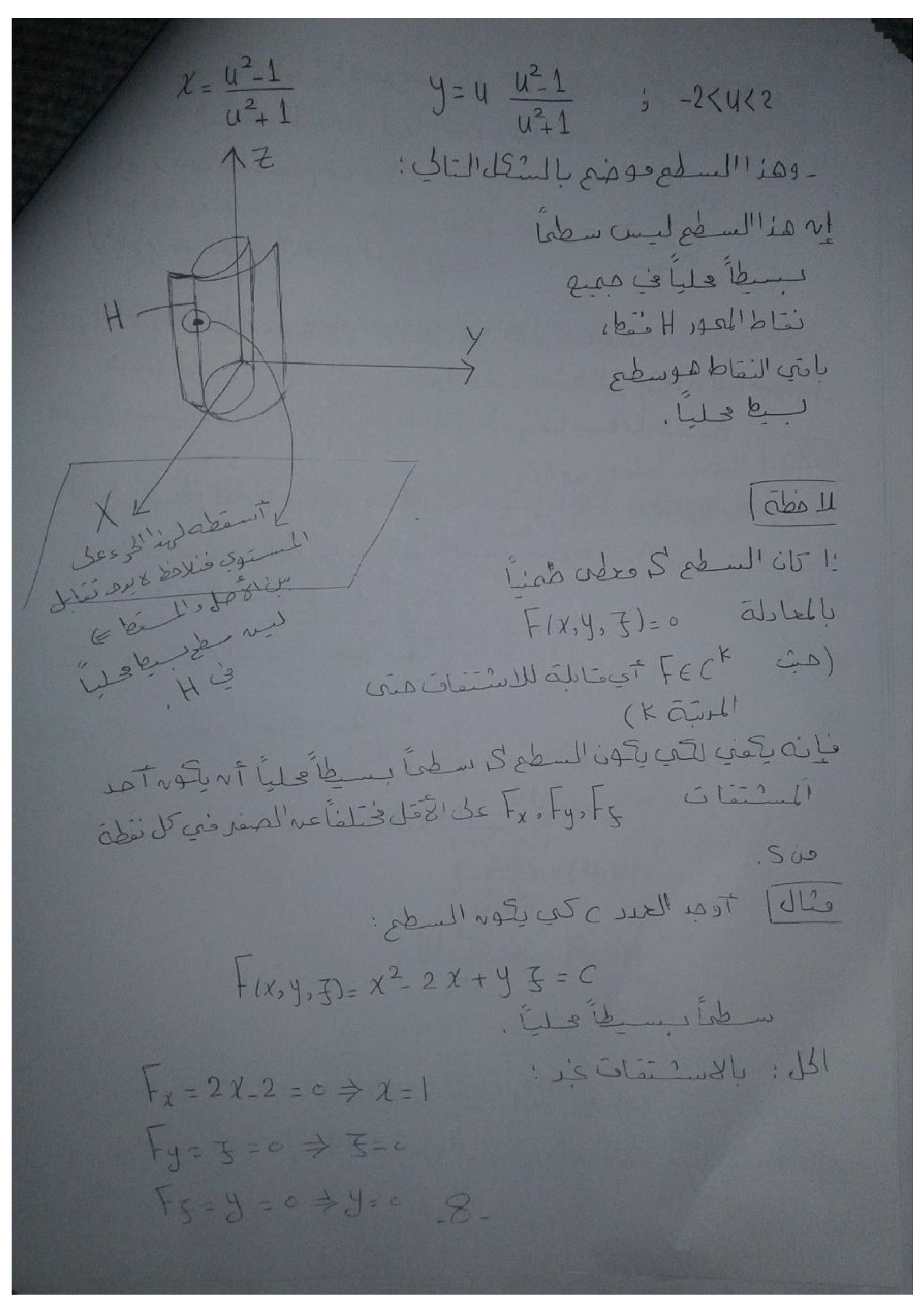
- ولنعرف على هذا المستطيل الدوال المستمرة:

$$x(u,v) = \frac{u^2-1}{u^2+1}$$

$$y(u,v) = u\ \frac{u^2-1}{u^2+1}$$

$$z = v$$

- إن مجموعة نقاط الفضاء $\mathbb{R}^3$ التي إحداثياتها (x,y,z) تشكل سطحاً أسطوانياً قاعدته «دليله» منحني الإستروئيد المعطى بالمعادلتين:



$x = \frac{u^2-1}{u^2+1}$ $\quad y = u\,\frac{u^2-1}{u^2+1}$ $\quad ; \quad -2<u<2$

- وهذا السطح موضح بالشكل التالي:

إن هذا السطح ليس سطحاً بسيطاً محلياً في جميع نقاط المحور H فقط، باقي النقاط هو سطح بسيط محلياً.

ملاحظة

إذا كان السطح S معطى ضمنياً بالمعادلة $F(x,y,z)=0$ (حيث $F \in C^k$ أي قابلة للاشتقاق حتى المرتبة k) فإنه يكفي لكي يكون السطح S سطحاً بسيطاً محلياً أن يكون أحد المشتقات F_x, F_y, F_z على الأقل مختلفاً عن الصفر في كل نقطة من S.

مثال أوجد العدد c كي يكون السطح:

$$F(x,y,z) = x^2 - 2x + yz = c$$

سطحاً بسيطاً محلياً.

الحل: بالاشتقاق نجد:

$$F_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$F_y = z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$F_z = y = 0 \Rightarrow y = 0$$

لكي تقع النقطة $(1,0,0)$ على السطح يجب أن تكون $C=-1$ وبالتالي يكون السطح

$x^2-2x+yz=C$ سطحاً بسيطاً عادياً عندما $C\neq -1$

مثال السطوح التربيعية الآتية جميعها سطوح بسيطة عادياً لأنها تحقق الشرط المطلوب.

السطوح هي: ① مجسم القطع الناقص: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

② مجسم القطع الزائد ذو الفرع الواحد:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

③ مجسم القطع الزائد ذو الفرعين: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

④ مجسم القطع المكافئ الناقصي: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$

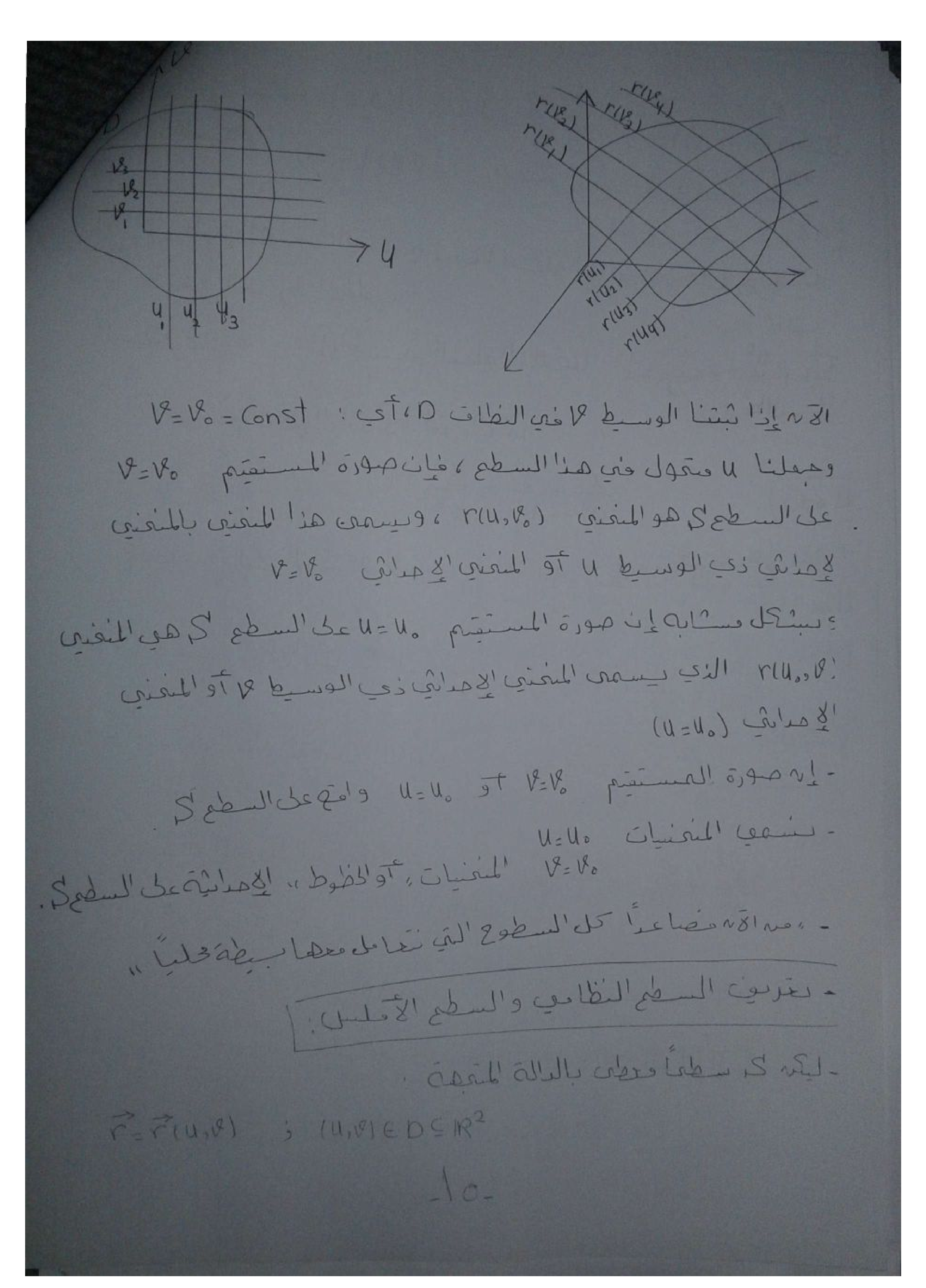
⑤ مجسم القطع المكافئ الزائدي: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$

⑥ مجسم المخروط التربيعي: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

$(x,y,z)\neq 0$ ← نحذف منه الصفر حيث الصفر ليس بسيطاً عادياً

- **المنحنيات الإحداثية على سطح:** ليكن لدينا السطح S المعطى بالمعادلة المتجهة:

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v)\ ;\ (u,v)\in D$$



الآن إذا ثبتنا الوسيط v في النطاق D، أي: $v = v_0 = Const$

وجعلنا u متحول في هذا السطح، فإن صورة المستقيم $v = v_0$ على السطح S هو المنحني $r(u, v_0)$، ويسمى هذا المنحني بالمنحني الإحداثي ذي الوسيط u أو المنحني الإحداثي $v = v_0$.

- بشكل مشابه إن صورة المستقيم $u = u_0$ على السطح S هي المنحني $r(u_0, v)$ الذي يسمى المنحني الإحداثي ذي الوسيط v أو المنحني الإحداثي $(u = u_0)$

- إن صورة المستقيم $v = v_0$ أو $u = u_0$ واقع على السطح S.

- نسمي المنحنيات $u = u_0$ ، $v = v_0$ "المنحنيات" أو "الخطوط" الإحداثية على السطح S.

- "من الآن فصاعداً كل السطوح التي نتعامل معها بسيطة محلياً"

- تعريف السطح النظامي والسطح الأملس:

- ليكن S سطحاً معطى بالدالة المتجهة:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) \quad ; \quad (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

- إذا كانت كل من الدالتين $\vec{r_u}, \vec{r_v}$ مستمرة، ولها مشتقات مستمرة حتى المرتبة k حيث $k \geq 1$، وبحيث:

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} \neq 0$$

في كل نقطة من نقاط السطح S

عندئذٍ نقول عن السطح S إنه سطح نظامي من المرتبة k.

وحيث:

$$\vec{r_u}, \vec{r_v} \in C^k$$

" C^k صف الدوال المستمرة والقابلة للاشتقاق حتى المرتبة k "

- إذا كان العدد $k=1$ يسمى السطح أملس في هذه الحالة.

- الأملس هو نظامي، أما العكس فهو غير صحيح.

- وفي حالة السطح معطى بالمعادلة الضمنية $F(x, y, z) = 0$ عندئذٍ

يكون السطح نظامياً إذا كانت جميع المشتقات F_x, F_y, F_z

غير معدومة عند كل نقطة من نقاطه.

" أو إذا كانت إحداها على الأقل غير معدومة "

أمثلة

مثال 1 ليكن النطاق D المعطى بالشكل:

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 ;\ u^2 + v^2 < 1\}$$

ولتكن الدالة:

$$\vec{r}(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}\right)$$

التي تمثل النصف العلوي من كرة الواحدة.

- نلاحظ أن الدالة $\vec{r}$ قابلة للمفاضلة، وأن:

$$\vec{r_u} = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}\right)$$

$$\vec{r_v} = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}\right)$$

وهي دوال مستمرة

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{-u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \\ 0 & 1 & \frac{-v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}\vec{i} + \frac{v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}\vec{j} + \vec{k} \neq 0$$

أي إن :

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = \left(\frac{u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}, \frac{v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}, 1 \right) \neq 0$$

وبالتالي نصف الكرة العلوي سطح أملس.

- وكذلك يمكننا إثبات أن نصف الكرة السفلي سطح أملس.

مثال 2 ليكن السطح : $r(u,v) = (u^2, v^2, u.v)$

عندئذٍ يكون :

$\vec{r_u} = (2u, 0, v)$

$\vec{r_v} = (0, 2v, u)$

أي إن :

$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = (-2v^2, -2u^2, 4uv)$

نلاحظ أنه في النقطة $(0,0)$ يكون $\vec{r_u} \times \vec{r_v} = 0$

لذلك فإن السطح ليس أملس في النقطة $(0,0,0)$ منه.

- طالما وجدت نقطة السطح فيها ليس أملس ⇐ ليس أملس.

مثال 3 لنأخذ السطح المعين بالمعادلة المتجهة :

$r(u,v) = (u, v^2, v^3)$

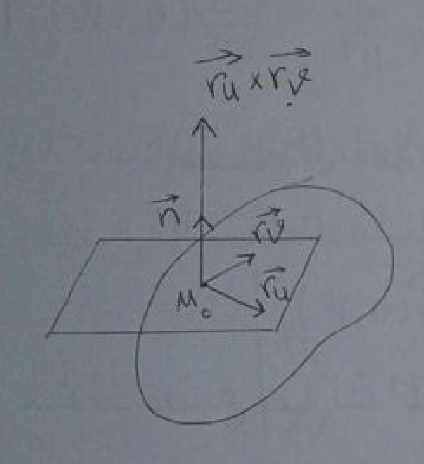
$r_u = (1,0,0)$ $\qquad$ $r_v = (0, 2v, 3v^2)$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2v & 2v^2 \end{vmatrix} = -3v^2 \vec{j} + 2v\vec{k}$$

$\Rightarrow \vec{r_u} \times \vec{r_v} = (0, -3v^2, 2v)$

- نلاحظ أن جميع نقاط السطح التي من أجلها $v=0$ لا يكون السطح فيها أملس. ⇐ ليس أملس.

المستوي المماس لسطح نظامي



- ليكن S سطحاً نظامياً معطى بالدالة المتجهة:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \quad ; \quad (u,v) \in D$$

باعتبار أن S نظامياً هذا يعني أن:

$\vec{r_u}$ ، $\vec{r_v}$ غير متوازيين.

الآن نسمي المستوي المار من النقطة $M_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ والذي يحوي المتجهين $\vec{r_u}(u_0, v_0)$ و $\vec{r_v}(u_0, v_0)$ بالمستوي المماس للسطح S في M_0.

- طبعاً متجه الناظم عليه هو $\vec{r_u} \times \vec{r_v}$

ومتجه وحدة الناظم هو:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|}$$

- وبالتالي المعادلة المتجهة للمستوي المماس المار من M_0 ومن النقطة المتحولة M هي:

$$(\overrightarrow{M_0M}, \vec{r_u}, \vec{r_v}) = 0$$

- أما إذا أعطي السطح S بالشكل الوسيطي :

$$x = x(u,v) \quad , \quad y = y(u,v) \quad , \quad z = z(u,v)$$

عندئذٍ تصبح المعادلة المتجهة -1- بالشكل التحليلي على النحو :

$$\begin{vmatrix} x - x_0(u_0,v_0) & y - y_0(u_0,v_0) & z - z_0(u_0,v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix} =$$

- إذا كان السطح S معطى بالمعادلة الظاهرية $z = f(x,y)$ التي تصبح بالشكل الوسيطي إذا فرضنا :

$$x = u \quad , \quad y = v \quad , \quad z = f(u,v)$$

- عندئذٍ تصبح معادلة المستوي المماس على النحو :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0,y_0) \end{vmatrix} = 0$$

- أما إذا أعطي السطح بالمعادلة الضمنية ، "الشكل العام"

$$F(x,y,z) = 0$$

فإن المتجه $\overrightarrow{grad F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ يمثل متجه الناظم على هذا السطح، ونفرض $M(x,y,z)$ نقطة متحولة عليه عندئذٍ معادلة

المستوي المماس لهذا السطح في النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$
يكون من الشكل :

$$(x-x_0)F_x(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)F_y(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)F_z(x_0,y_0,z_0)=0$$

- المستقيم الناظم على السطح

المستقيم الناظم على سطح في نقطة منه هو مستقيم يعامد المستوي المماس لهذا السطح في تلك النقطة، ومنه هذا المستقيم هو منحى الناظم على المستوي المماس أي المستقيم $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$

وبالتالي فمعادلة الخط الناظم للسطح المعطى بالمعادلة المتجهة $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ هي :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

- وبالشكل :

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}}$$

وإذا كان السطح S معطى بـ $z=f(x,y)$ تصبح المعادلة المتجهة للخط الناظم:

$$\frac{x-x_0}{-f_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{-f_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{1}$$

وإذا كان السطح S معطى ضمنياً بالمعادلة $F(x,y,z)=0$ فإن معادلة المستقيم الناظم تصبح:

$$\frac{x-x_0}{F_x\big|_{(x_0,y_0,z_0)}} = \frac{y-y_0}{F_y\big|_{(x_0,y_0,z_0)}} = \frac{z-z_0}{F_z\big|_{(x_0,y_0,z_0)}}$$

مثال / أوجد معادلة المستوي المماس والمستقيم الناظم على السطح المعطى بالمعادلة: $z = x^2 - y^2$

في النقطة $(1,1,0)$ منه.

الحل: إن المعادلات الوسيطة للسطح هي:

$$x = u \,,\; y = v \,,\; z = u^2 - v^2$$

وبالتالي معادلة المستوي المماس هي:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

$$x_0 = 1 \quad , \quad y_0 = 1 \quad , \quad z_0 = 0$$

$$x_u = 1 \qquad y_u = 0 \qquad z_u = 2u\big|_{(u_0,v_0)} = 2$$

$$x_v = 0 \qquad y_v = 1 \qquad z_v = -2v\big|_{(u_0,v_0)} = -2$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -2(x-1)+2(y-1)+z=0$$

$$-2x+2+2y-2+z=0$$

$$\Rightarrow -2x+2y+z=0$$

- ومعادلتا المستقيم الناظم في تلك النقطة هي :

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{y-1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

طريقة 2) : الناظم على المستوي هو ناظم السطح $\vec{N}$ ، لدينا $\vec{r_u}, \vec{r_v}$ واقعتان في مستوٍ واحد ، والمثال التالي يوضح هذا :

مثال 2 $r(u,v)=(u,v,uv)$ [illegible]

أوجد معادلة المستوي المماس ومعادلتي المستقيم الناظم في النقطة $(1,2)$ منه

معادلة المستوي المماس:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -2(x-1)-(y-2)+z-2=0$$

$$\Rightarrow -2x-y+z+2=0$$

وهي معادلة المستوي المماس.

ومعادلتا المستقيم الناظم على السطح في $(1,2,2)$ هما:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

طريقة 2: سنوجد متجه المستقيم الناظم:

$\vec{r_u} = (1,0,v) \Rightarrow r_u(1,2) = (1,0,2)$

$\vec{r_v} = (0,1,u) \Rightarrow r_v(1,2) = (0,1,1)$

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 1\vec{j} + \vec{k} = (-2,-1,1)$$

$$|\vec{r_u} \times \vec{r_v}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|} = \frac{(-2,-1,1)}{\sqrt{6}}$$

- النقطة الموافقة ل $u=1$, $v=2$ هي $M_0(1,2,2)$

بحيث النقطة والناظم معلومة من المستوي ⇐
معادلة المستوي المماس :

$$\frac{-2}{\sqrt6}(x-1)-\frac{1}{\sqrt6}(y-2)+\frac{1}{\sqrt6}(z-2)=0$$

$$\Rightarrow -2x-y+z+2=0$$

ومعادلتي المستقيم الناظم (بعد ضرب المقامات بـ $\sqrt6$):

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{1}$$

مثال 3 أوجد المستوي المماس والمستقيم الناظم على السطح المعطى بالمعادلة المتجهية :

$$R(u,v)=u(\cos v\,i+\sin v\,j)+(1-u^2)k \quad ; u\geq 0,\ 0\leq v\leq 2\pi$$

في النقطة الموافقة لـ $u=1$, $v=\frac{\pi}{2}$

الحل :

$$R_u=\cos v\,i+\sin v\,j-2u\,k$$

$$R_v=u(-\sin v\,i+\cos v\,j)$$

فيكون متجه الناظم على السطح هو :

$$R_u\times R_v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & -2u \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$=2u^2(\cos v\,i+\sin u\,j)+u\,k$$

وفي النقطة $u=1$ ، $v=\frac{\pi}{2}$ يكون :

$R_u \times R_v = 2j + k$

وبالتالي معادلة المستوي المماس للسطح S في النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0) = (0, 1$ تكون :

من u_0 و v_0 نبدل في $R \Rightarrow x_0, y_0, z$ بإحداثيات مركبات R

$$0(x-0) + 2(y-1) + 1(z-0) = 0$$

$$\Rightarrow 2y + z - 2 = 0$$

ومعادلتي المستقيم الناظم هما :

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-0}{1}$$

مثال 4 السطح $z = x^2 + y^2$ «مثال 1»

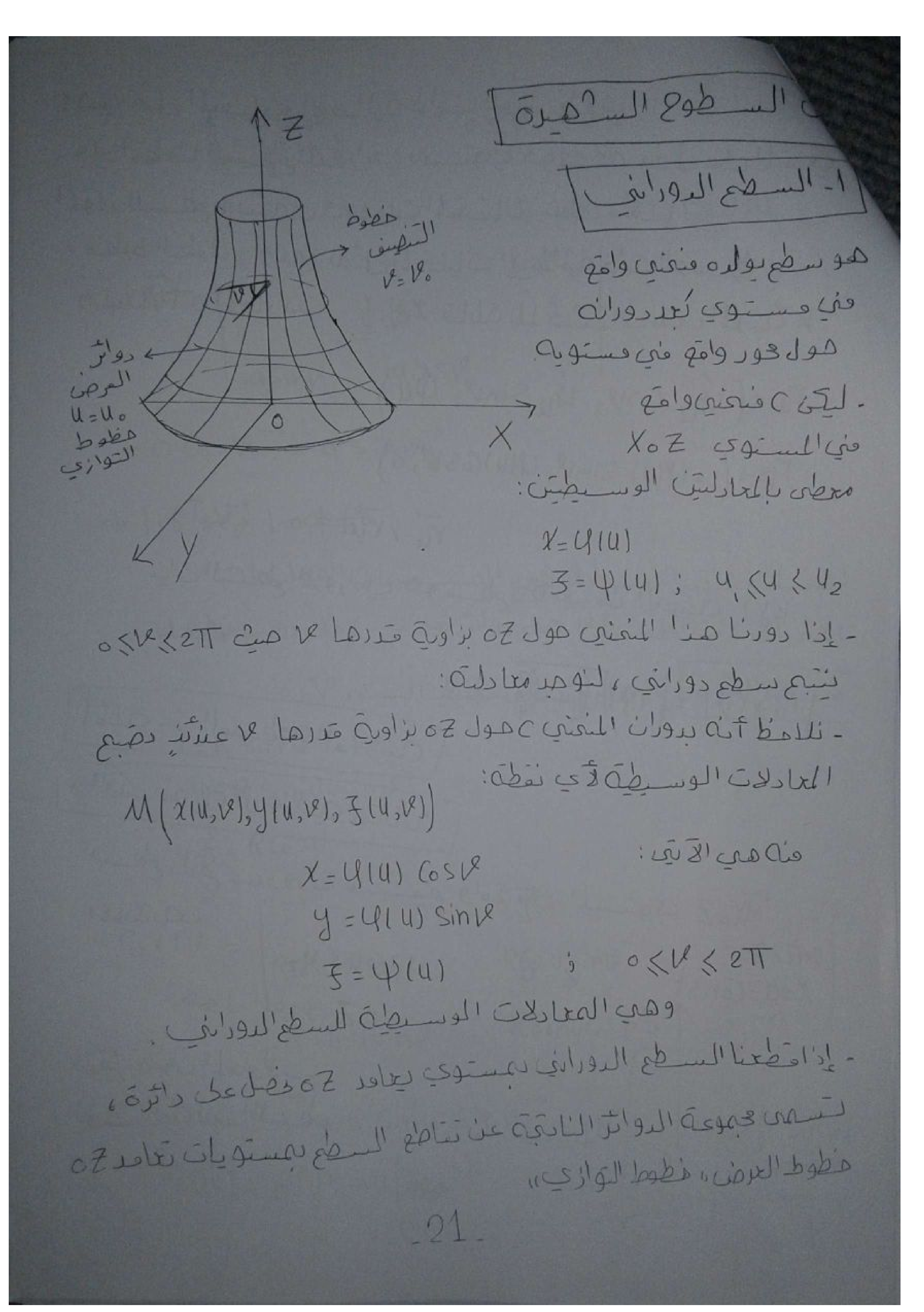
إن معادلة المستوي المماس للسطح في النقطة $(1, 1, 0)$ منه هي :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2y - 2 = 0$$

ومعادلتي المستقيم الناظم على S في النقطة المفروضة هما :

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$



السطوح الشهيرة

1- السطح الدوراني

هو سطح يولده منحني واقع في مستوي بعد دورانه حول محور واقع في مستويه.

- ليكن C منحني واقع في المستوي XoZ معطى بالمعادلتين الوسيطتين:

$$x = \varphi(u)$$

$$z = \psi(u) \; ; \quad u_1 \leq u \leq u_2$$

- إذا دورنا هذا المنحني حول oz بزاوية قدرها v حيث $0 \leq v \leq 2\pi$ ينتج سطح دوراني، لنوجد معادلته:

- نلاحظ أنه بدوران المنحني C حول oz بزاوية قدرها v عندئذ نضع المعادلات الوسيطية لأي نقطة:

$$M\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

منه هي الآتي:

$$x = \varphi(u) \cos v$$

$$y = \varphi(u) \sin v$$

$$z = \psi(u) \; ; \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

وهي المعادلات الوسيطية للسطح الدوراني.

- إذا قطعنا السطح الدوراني بمستوي يعامد oZ نحصل على دائرة، تسمى مجموعة الدوائر الناتجة عن تقاطع السطح بمستويات تعامد oZ "خطوط العرض" "خطوط التوازي"

وهي تمثل المنحنيات الإحداثية ذات الوسيط v.

- وإذا قطعنا السطح الدوراني بمستوي يحوي oz نحصل على المنحني المولد للسطح وتسمى مجموعات المنحنيات هذه منحنيات التنصيف "خطوط الطول" وهي تمثل المنحنيات الإحداثية ذات الوسيط u.

- وباعتبار أن المعادلات x, y, z قابلة للاشتقاق حتى المرتبة k

$$r_u = (\varphi'_u \cos v, \varphi'_u \sin v, \psi'_u)$$

$$r_v = (-\varphi(u) \sin v, \varphi(u) \cos v, 0)$$

وأن: $\vec{r_u} \times \vec{r_v} \neq 0$

فإن السطح الدوراني هو سطح نظامي من المرتبة $k \geq 1$.

حيث:

$$|r_u \times r_v| = \varphi \sqrt{\psi'^2_u + \varphi'^2_u} \neq 0$$

أمثلة عن السطوح الدورانية

- **الأسطوانة الدورانية القائمة**

سطح ناتج عن دوران مستقيم واقع في المستوي XoZ معادلاته:

$x = a = Const \quad , \quad z = u \quad ; u_1 \leq u \leq u_2$

حول المحور oZ.

عندئذٍ تكون المعادلات الوسيطية لهذا السطح هي:

Z
O
X
Y

$$x = a\cos v \quad ; \quad 0 \le v \le 2\pi$$
$$y = a\sin v$$
$$z = u$$

- نلاحظ أن السطح نظامي :

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -a\sin v & a\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a\cos v\,\vec{i} - a\sin v\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow |\vec{r_u} \times \vec{r_v}| = a \neq 0$$

المنحنيات ذات الوسيط u هي المستقيمات المولدة له.

المنحنيات ذات الوسيط v هي دوائر توازي xoy ونصف قطرها a.

سطح الكرة المعادلات الوسيطية لسطح الكرة :

$$x = R\sin u\cos v$$
$$y = R\sin u\sin v$$
$$z = R\cos u$$

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R\cos u\cos v & R\cos u\sin v & -R\sin u \\ -R\sin u\sin v & R\sin u\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= R^2\sin^2 u\cos v\,\vec{i} + R^2\sin^2 u\sin v\,\vec{j} + [R^2\sin u\cos u](\sin^2 v + \cos^2 v)$$

$$\Rightarrow |\vec{r_u} \times \vec{r_v}| = R^2|\sin u|$$

نلاحظ أن سطح الكرة ليس نظامياً في النقاط $u=0,\pi$ أي في نقاط القطبين، فإذا اعتبرنا R معرف على الشرط اللانهائي

$$0<u<\pi \qquad -\infty<v<+\infty$$

فإن سطح الكرة في هذه الحالة يمثل سطحاً نظامياً من الصف C^{∞}.

سطح الطارة

$$x=(a+b\sin v)\cos u$$
$$y=(a+b\sin v)\sin u$$
$$z=b\cos v$$

$$x_u=-(a+b\sin v)\sin u$$
$$y_u=(a+b\sin v)\cos u$$
$$z_u=0$$

$$x_v=b\cos v\cos u$$
$$y_v=b\cos v\sin u$$
$$z_v=-b\sin v$$

$$\vec{r_u}=\left(-(a+b\sin v)\sin u,\ (a+b\sin v)\cos u,\ 0\right)$$

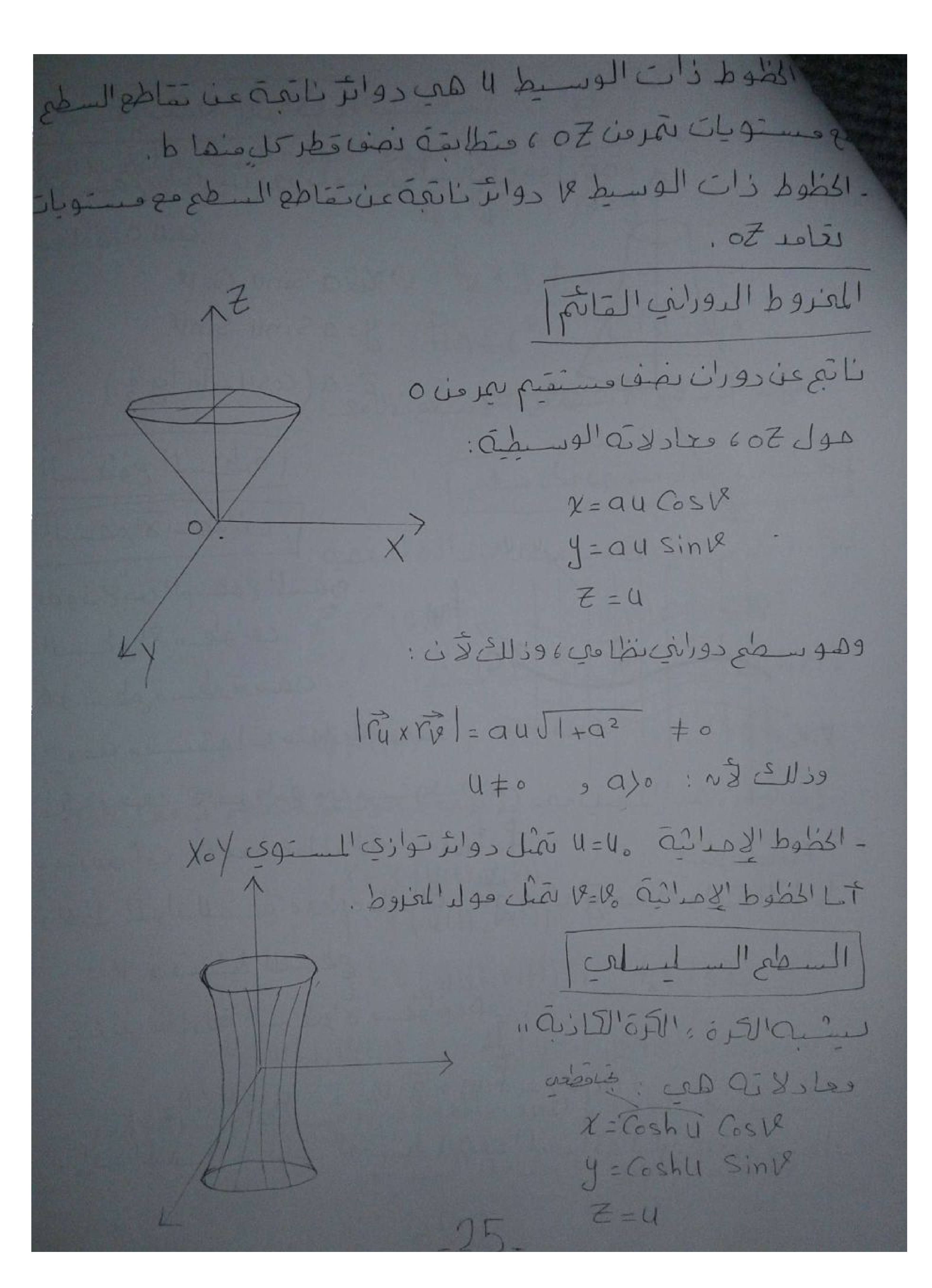
$$\vec{r_v}=\left(b\cos v\cos u,\ b\cos v\sin u,\ -b\sin v\right)$$

$$\vec{r_u}\times\vec{r_v}=\left(b(a+b\sin v)\right)\left(-\sin v\cos u,\ -\sin v\sin u,\ -\cos v\right)$$

$$|\vec{r_u}\times\vec{r_v}|=b(a+b\sin v)\neq 0$$

⇐ سطح الطارة هو سطح نظامي في كل نقطة من نقاطه

أي سطح نظامي من المرتبة ∞ ، لا يوجد عليه نقاط شاذة.



الخطوط ذات الوسيط u هي دوائر ناتجة عن تقاطع السطح مع مستويات تمر من oz ، متطابقة نصف قطر كل منها b.

- الخطوط ذات الوسيط v دوائر ناتجة عن تقاطع السطح مع مستويات تعامد oz.

المخروط الدوراني القائم

ناتج عن دوران نصف مستقيم يمر من o حول oz ، معادلاته الوسيطية:

$$x = au\cos v$$
$$y = au\sin v$$
$$z = u$$

وهو سطح دوراني نظامي ، وذلك لأن:

$$|\vec{r_u} \times \vec{r_v}| = au\sqrt{1+a^2} \neq 0$$

وذلك لأنه: $a > 0$ و $u \neq 0$

- الخطوط الإحداثية $u = u_0$ تمثل دوائر توازي المستوى XoY

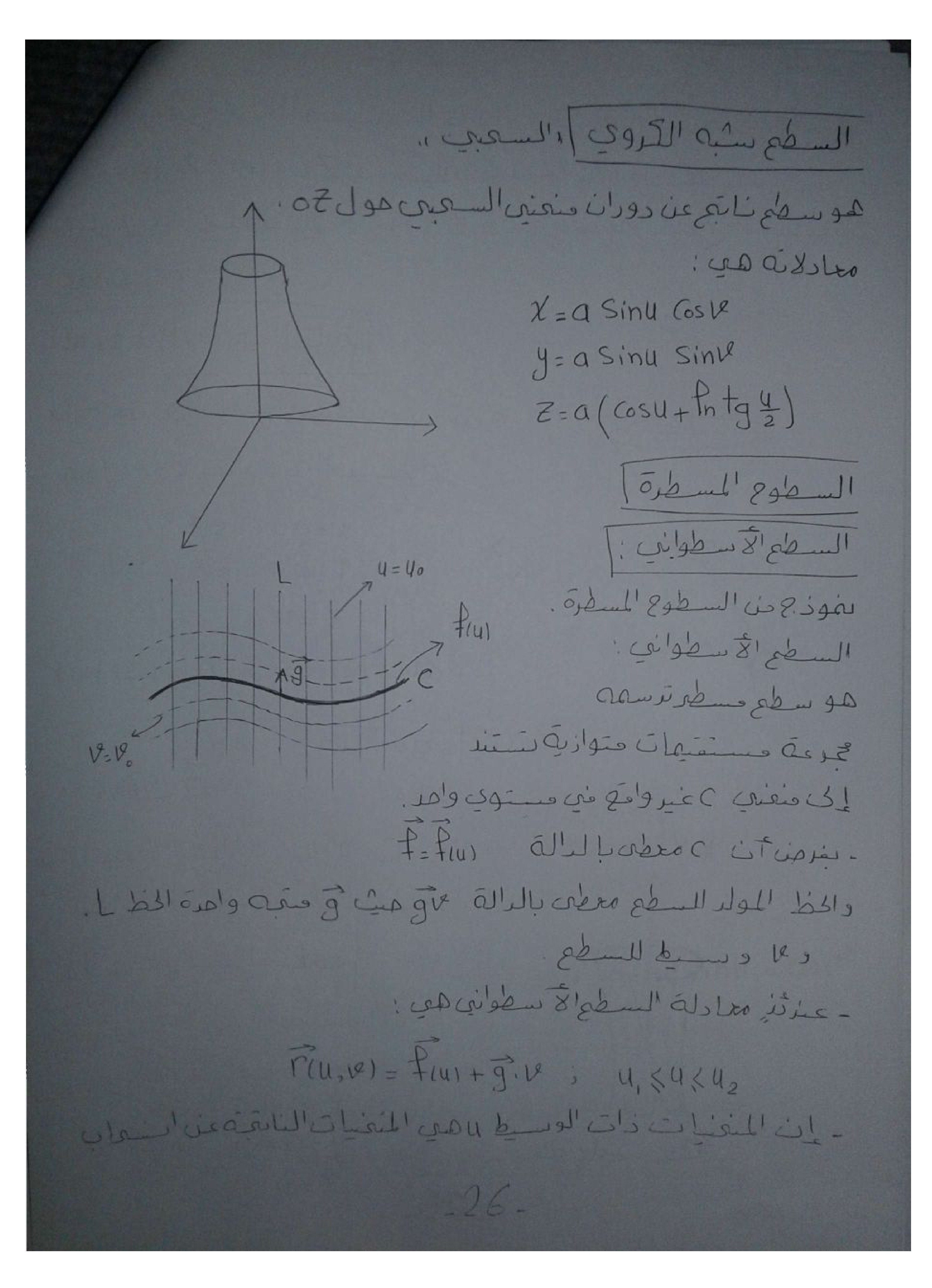
أما الخطوط الإحداثية $v = v_0$ تمثل مولد المخروط.

السطح السلسلي

يشبه الكرة ، "الكرة الكاذبة"

معادلاته هي: (جتا قطعي)

$$x = \cosh u \cos v$$
$$y = \cosh u \sin v$$
$$z = u$$



السطح شبه الكروي، السحبي:

هو سطح ناتج عن دوران منحني السحبي حول oz.

معادلاته هي:

$$x = a \sin u \cos v$$

$$y = a \sin u \sin v$$

$$z = a\left(\cos u + \ln tg \frac{u}{2}\right)$$

السطوح المسطرة

السطح الأسطواني:

نموذج من السطوح المسطرة.

السطح الأسطواني:

هو سطح مسطر ترسمه مجموعة مستقيمات متوازية تستند إلى منحني C غير واقع في مستوي واحد.

- نفرض أن C معطى بالدالة $\vec{f} = \vec{f}(u)$ والخط المولد للسطح معطى بالدالة $\vec{g}v$ حيث $\vec{g}$ متجه واحدة الخط L.

و v, u وسيط للسطح.

- عندئذٍ معادلة السطح الأسطواني هي:

$$\vec{r}(u,v) = \vec{f}(u) + \vec{g} \cdot v \quad ; \quad u_1 \leqslant u \leqslant u_2$$

- إن المنحنيات ذات الوسيط u هي المنحنيات الناتجة عن انسحاب

ب c باتجاه المتجه g.

المنحنيات ذات الوسيط v هي الخطوط المولدة للسطح، الموازية للخط L.

$$r_u = f_u \quad , \quad r_v = g$$

$$r_u \times r_v = f_u \times g \neq 0$$

وباعتبار أن: $f(u) \in C^k$

فإن السطح الأسطواني هو سطح نظامي.

حساب طول منحني على سطح

ليكن S سطح نظامي معطى بالدالة المتجهة:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \quad ; \quad (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

- الآن لنعرف في النطاق D المنحني:

$$u = u(t) \quad , \quad v = v(t) \quad ; \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

- إن صورة هذا المنحني في D هي منحني على السطح S معادلاته الوسيطية:

$$x = x(u(t), v(t))$$
$$y = y(u(t), v(t))$$
$$z = z(u(t), v(t)) \quad ; \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

- الآن نفرض $M_0(u(t_0), v(t_0))$ ، $M_1(u(t_1), v(t_1))$ نقطتين على المنحني L المعرف بالمعادلات الوسيطية الأخيرة ولنجد طول هذا المنحني بين هاتين النقطتين.

- بالعودة إلى نظرية المنحنيات لدينا:

$$s(t)=\int_{t_0}^{t_1} |\acute{r}(t)|\, dt = \int_{t_0}^{t} \Big| \underbrace{\acute{r}\big(u(t),v(t)\big)}_{\frac{dr}{dt}} \Big|\, dt = \int_{t_0}^{t} |dr|\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \sqrt{(dr)^2}\, dt = \int_{t_0}^{t} (dr.dr)^{1/2}\, dt$$

لعدم الضرورة
إشارة (') في r_v كافي.

$$\vec{dr}.\vec{dr} = (\acute{r}_u\, du + \acute{r}_v\, dv)(\acute{r}_u\, du + \acute{r}_v\, dv)$$

$$= \acute{r}_u^2 (du)^2 + 2\acute{r}_u \acute{r}_v\, du\, dv + \acute{r}_v^2 (dv)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{s(t)=\int_{t_0}^{t} \sqrt{\acute{r}_u^2 (du)^2 + 2\acute{r}_u \acute{r}_v\, du\, dv + \acute{r}_v^2 (dv)^2}\; dt}$$

أو نكتبها:

$$\boxed{s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\acute{r}_u^2\, \acute{u}^2(t) + 2\acute{r}_u \acute{r}_v\, \acute{u}(t)\, \acute{v}(t) + \acute{r}_v^2\, \acute{v}^2(t)}\; dt}$$

الزاوية بين منحنيين على سطح

نفرض لدينا سطح ما S معطى بالدالة المتجهة:

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v)\ ;\ (u,v)\in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

ليكن Γ_1, Γ_2 منحنيين أملسين على السطح S

بالتعريف الزاوية بين Γ_1, Γ_2 هي الزاوية بين متجهين مماسيهما في نقطة التقاطع.

- ليكن dr متجه المماس للمنحني Γ_1 بحيث: $dr = r_u du + r_v dv$
- ليكن δr متجه المماس للمنحني Γ_2 بحيث: $\delta r = r_u \delta u + r_v \delta v$

عندئذٍ الزاوية بين Γ_1, Γ_2 تعطى بالعلاقة:

$$\cos\theta = \frac{dr.\delta r}{|dr||\delta r|} =$$

$$= \frac{(r_u du + r_v dv).(r_u \delta u + r_v \delta v)}{\sqrt{r_u^2 du^2 + 2r_u r_v du dv + r_v^2 dv^2}\sqrt{r_u^2 \delta u^2 + 2r_u r_v \delta u \delta v + r_v^2 \delta v^2}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{r_u^2 du \delta u + r_u r_v (du \delta v + dv \delta u) + r_v^2 du \delta v}{\sqrt{r_u^2 du^2 + 2r_u r_v du dv + r_v^2 dv^2}\sqrt{r_u^2 \delta u^2 + 2r_u r_v \delta u \delta v + r_v^2 \delta}}$$

حالة خاصة وهي الزاوية بين المنحنيات الإحداثية على سطح إذا كان: Γ_1 المنحني الإحداثي ذي الوسيط u

$\Gamma_1 = r(u(t), v_0) \Rightarrow (du, dv) = (du, 0)$

Γ_2 المنحني الإحداثي ذي الوسيط v

$$\Gamma_2 = r(u_0, v(t)) \Rightarrow (\delta u, \delta v) = (0, \delta v)$$

- بالتعويض في العلاقة الأخيرة نجد:

$$\cos\theta = \frac{r_u r_v \, du \, \delta v}{\sqrt{r_u^2 du^2} \sqrt{r_v^2 \delta v^2}} = \frac{r_u r_v}{\sqrt{r_u^2} \sqrt{r_v^2}}$$

- **نتيجة هامة**: من هنا نجد أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المنحنيات الإحداثية على سطح متعامدة هو أن يكون $r_u \cdot r_v = 0$

، وهذا محقق في السطوح الدورانية ومنها سطح الكرة.

مساحة منطقة على سطح

المنحنيات ذات الوسيط v

$\vec{r_v}$

$\vec{r_u}$

المنحنيات ذات الوسيط u

ليكن S سطحاً نظامياً معطى بالدالة المتجهة

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v); \quad (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

- إن مساحة المنطقة المحددة بالنطاق D على سطح تعطى بالدستور:

$$\sigma = \iint_D |\vec{r_u} \times \vec{r_v}| \, du \, dv$$

$$= \iint_D \sqrt{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|^2} \, du \, dv$$

$$\sqrt{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|^2} = \sqrt{|\vec{r_u}|^2 \cdot |\vec{r_v}|^2 \cdot \sin^2\theta} =$$

$$= \sqrt{|\vec{r_u}|^2 \cdot |\vec{r_v}|^2 (1 - \cos^2\theta)}$$

$$= \sqrt{|\vec{r_u}|^2 \cdot |\vec{r_v}|^2 - |\vec{r_u}|^2 \cdot |\vec{r_v}|^2 \cos^2\theta} \longrightarrow \frac{r_u r_v}{\sqrt{r_u^2}\sqrt{r_v^2}}$$

$$= \sqrt{|\vec{r_u}|^2 \cdot |\vec{r_v}|^2 - r_u^2 r_v^2}$$

$$\Rightarrow \sigma = \iint_D \sqrt{|\vec{r_u}|^2 |\vec{r_v}|^2 - r_u^2 r_v^2} \, du\, dv$$

مثال ١ لنأخذ المنحني γ المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين:

$$\begin{cases} \theta = \ln \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) & ; \quad 0 < t \leq \frac{\pi}{2} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} - t \end{cases}$$

لنوجد طول هذا المنحني الواقع على سطح كرة الوحدة.
ثم لنوجد الزاوية α بين هذا المنحني والمنحني الإحداثي ذي الوسيط θ: خطوط العرض.

الحل: كرة الوحدة معطاة بالمعادلات الوسيطية

$$x = \cos\theta \sin\varphi$$
$$y = \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = \cos\varphi$$

لنوجد طول هذا المنحني:

$$r = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)$$
$$r_\theta = (-\sin\theta \sin\varphi, \cos\theta \sin\varphi, 0)$$
$$r_\varphi = (\cos\theta \cos\varphi, \sin\theta \cos\varphi, -\sin\varphi)$$

$r_\theta^2 = \sin^2\varphi \qquad r_\varphi^2 = 1 \qquad r_\theta \, r_\varphi = 0$

لإيجاد $\frac{d\theta}{dt}$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{+\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})}}{\cot(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})}$$

حيث نتذكر:

$$(\cot g(x))' = \frac{-g'(x)}{\sin^2(g(x))}$$

$$(\tan g(x))' = \frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})}}{\frac{\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})}{\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})}}$$

$$= \frac{1}{2\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}).\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}-t)} = \frac{1}{\sin\varphi}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -1$$

$$\Rightarrow r_\theta^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2 r_\theta r_\varphi \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r_\varphi^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 =$$

$$= \sin^2\varphi \cdot \frac{1}{\sin^2\varphi} + 0 + 1(-1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow S(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r_\theta^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2 r_\theta r_\varphi \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r_\varphi^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

- لنوجد الزاوية التي يصنعها هذا المنحنى مع المنحنيات ذات الوسيطان

$$\cos\alpha = \frac{\vec{dr}\cdot\vec{r_\theta}}{|\vec{dr}|\cdot|\vec{r_\theta}|}$$

حيث: $\vec{dr}$ متجه المماس للمنحني

$\vec{r_\theta}$ متجه المماس للمنحني ذي الوسيط θ، "خطوط العرض"

$$\vec{dr}\cdot\vec{r_\theta} = \left(\vec{r_\theta}\frac{d\theta}{dt} + \vec{r_\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{r_\theta} = r_\theta^2\frac{d\theta}{dt} + \vec{r_\varphi}\,\vec{r_\theta}\frac{d\varphi}{dt} =$$

$$\Rightarrow \vec{r_\varphi}\cdot\vec{r_\theta} = 0$$

و: $\Rightarrow |\vec{dr}|\cdot|\vec{r_\theta}| = \sqrt{dr^2}\ \sqrt{r_\theta^2}$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{r_\theta^2\frac{d\theta}{dt}}{\sqrt{dr^2}\ \sqrt{r_\theta^2}} = \frac{\sqrt{r_\theta^2}}{\sqrt{dr^2}}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

مثال 2 | لنوجد مساحة السطح المعطى بالمعادلة $z = f(x,y)$

الحل: هذا السطح يعطى بالمعادلات الوسيطية:

$$r(x,y,z) = r\left(x = u,\ y = v,\ z = f(u,v)\right)$$

$$(r_x)^2 = (1,0,f_x)^2 = 1 + f_x^2$$

$$r_x\cdot r_y = (1,0,f_x)\cdot(0,1,f_y) = f_x f_y$$

$$(r_y)^2 = (0,1,f_y)^2 = 1 + f_y^2$$

$$|r_y|^2 - r_x^2 r_y^2 = (1+f_x^2)(1+f_y^2) - f_x^2 f_y^2$$
$$= 1 + f_x^2 + f_y^2$$

$$\Rightarrow \sigma = \iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\; dx\, dy$$

مثال 3 لنحسب مساحة سطح الكرة التي نصف قطرها a.

الحل: ليكن S سطح كرة نصف قطرها a:

$$r = (a\cos\theta \cos\varphi,\; a\sin\theta \cos\varphi,\; a\sin\varphi)$$

نفس الحالة (أو بال u, v)

$$D = \{(\theta, \varphi) ;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi ;\; -\tfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2}\}$$

$$r_\theta = (-a\sin\theta \cos\varphi,\; a\cos\theta \cos\varphi,\; 0)$$

$$r_\varphi = (-a\cos\theta \sin\varphi,\; -a\sin\theta \sin\varphi,\; a\cos\varphi)$$

$$(r_\theta)^2 = a^2\cos^2\varphi$$
$$r_\theta r_\varphi = 0$$
$$r_\varphi^2 = a^2$$

$\Rightarrow$ الخطوط الإحداثية على سطح الكرة متعامدة

$$\sigma = \iint_D \sqrt{|r_\theta|^2 |r_\varphi|^2 - r_\theta^2 r_\varphi^2}\; d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^4\cos^2\varphi - 0}\; d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos\varphi \, d\varphi \right) d\theta = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\sin\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} 2 \, d\theta = 4\pi a^2$$

مثال 4 لنحسب مساحة سطح الطارة:

الحل: المعادلات الوسيطية:

$$r = \big((a + b\sin\varphi)\cos\theta , (a + b\sin\varphi)\sin\theta , b\cos\varphi \big)$$

$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

$r_\theta^2 = (a + b\sin\varphi)^2$

$r_\theta r_\varphi = 0$

$r_\varphi^2 = b^2$

$$\sigma = \iint_D \sqrt{b^2 (a + b\sin\varphi)^2} \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} (ab + b^2 \sin\varphi) \, d\varphi \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\left[ab\varphi + b^2 \cos\varphi \right] \Big|_0^{2\pi} \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[2\pi ab + b^2 - b^2 \right] d\theta = \int_0^{2\pi} 2\pi ab \, d\theta = 2\pi \left(ab\theta \Big|_0^{2\pi} \right) =$$

$$= (2\pi)(2\pi) ab = 4ab\pi^2$$

مثال 5 | اللولب الدائري

$r(u,v) = a\cos v\, i + a\sin v\, j + u k$

معطى بالمعادلات الوسيطية:

$u = bt \qquad v = t$

$\Rightarrow r(t) = a\cos t\, i + b\sin t\, j + bt\, k$

$r'_u = k$ | $\frac{du}{dt} = b$

$r_v = -a\sin v + a\cos v$ | $\frac{dv}{dt} = 1$

⇐ طول المنحني بين النقطتين

$t = t \ , \ t = 0$

$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = a^2 + b^2 t$

مثال 6 | أوجد مساحة السطح المخروط الدوراني المعطى بالمعادلة:

$R(u,v) = u\cos v\, i + u\sin v\, j + u k$

$0 \leq u \leq a \qquad 0 \leq v \leq 2\pi$

الحل:

$R_u = \cos v\, i + \sin v\, j + k$

$r_v = -u\sin v\, i + u\cos v\, j$

$\Rightarrow r_u \times r_v = -u\cos v\, i - u\sin v\, j + u k$

$\Rightarrow |r_u \times r_v| = \sqrt{2}\, u$

$\Rightarrow \sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^a \sqrt{2}\, u\, du\, dv = \sqrt{2}\,\pi a^2$

تم مقرر
ليل المتجهات
عونه تعالى
سطى سلامة.

3/-